88137228

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 3 – SERIES Y ECUACIONES DIFERENCIALES

Martes 19 de noviembre de 2013 (tarde)

1 hora

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.
- En esta prueba es necesario usar una calculadora de pantalla gráfica.
- Se necesita una copia sin anotaciones del *cuadernillo de información* ***de Matemáticas NS y de Ampliación de Matemáticas NM*** para esta prueba.
- La puntuación máxima para esta prueba de examen es *[60 puntos]*.

Por favor comience cada pregunta en una página nueva. No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. En particular, junto a los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el procedimiento seguido para su obtención; por ejemplo, si se utiliza una gráfica para hallar una solución, se deberá dibujar aproximadamente la misma como parte de la respuesta. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

1. *[Puntuación máxima: 10]*

Considere la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n}$.

(a) Utilice un criterio de comparación para comprobar que la serie converge. *[2]*

(b) (i) Exprese $\frac{2}{n^2+3n}$ en fracciones simples.

(ii) A partir de lo anterior, halle el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+3n}$. *[8]*

2. *[Puntuación máxima: 9]*

El término general de una sucesión $\{a_n\}$ viene dado por la fórmula $a_n = \frac{e^n + 2^n}{2e^n}$, $n \in \mathbb{Z}^+$.

(a) Determine si la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente o creciente. *[3]*

(b) Compruebe que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y halle el límite L. *[2]*

(c) Halle el menor valor de $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que $|a_n - L| < 0,001$, para todo $n \geq N$. *[4]*

3. *[Puntuación máxima: 19]*

Considere la ecuación diferencial $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$, para $x,\ y > 0$.

(a) Utilice el método de Euler comenzando en el punto $(x,\ y) = (1,\ 2)$, con un intervalo $h = 0,2$, para hallar un valor aproximado de y para $x = 1,6$. *[7]*

(b) Utilice la sustitución $y = vx$ para comprobar que $x\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{1 + \sqrt{v}} - v$. *[3]*

(c) (i) A partir de lo anterior, halle la solución de la ecuación diferencial en la forma $f(x,\ y) = 0$, sabiendo que para $x = 1$, $y = 2$.

(ii) Halle el valor de y para $x = 1,6$. *[9]*

4. *[Puntuación máxima: 13]*

Sea $g(x) = \operatorname{sen} x^2$, donde $x \in \mathbb{R}$.

(a) Utilizando el resultado $\lim_{t \to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$, o de cualquier otro modo, calcule $\lim_{x \to 0} \frac{g(2x) - g(3x)}{4x^2}$. *[4]*

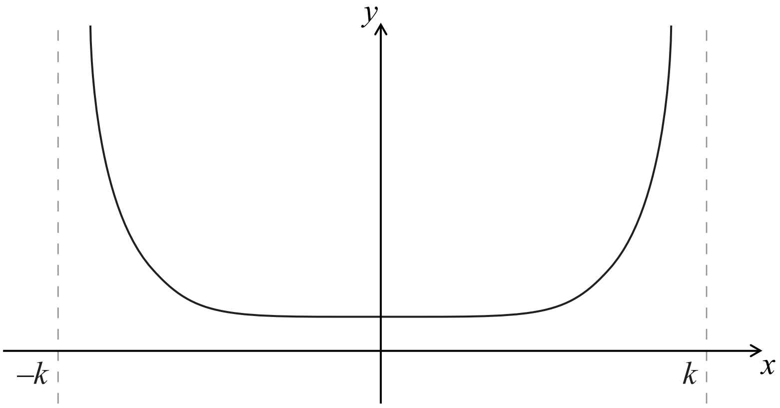
(b) Utilice la serie de Maclaurin de $\operatorname{sen} x$ para comprobar que $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$. *[2]*

(c) A partir de lo anterior, determine el número mínimo de términos del desarrollo de $g(x)$ que se necesitan para aproximar el valor de $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x$ con cuatro lugares decimales. *[7]*

5. *[Puntuación máxima: 9]*

Una función f se define en el intervalo $]-k, k[$, donde $k > 0$. La función derivada f' existe en cada punto del dominio de f.

La siguiente figura muestra la gráfica de $y = f(x)$, sus asíntotas y su eje de simetría vertical.



(a) Dibuje aproximadamente la gráfica de $y = f'(x)$. *[2]*

Sea $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$ el desarrollo de Maclaurin de $f(x)$.

(b) (i) Justifique por qué $a > 0$.

(ii) Escriba una condición para el conjunto más grande de valores posibles para cada uno de los parámetros b, c, y d. *[5]*

(c) Indique un límite superior para el radio de convergencia, dando una razón para su respuesta. *[2]*